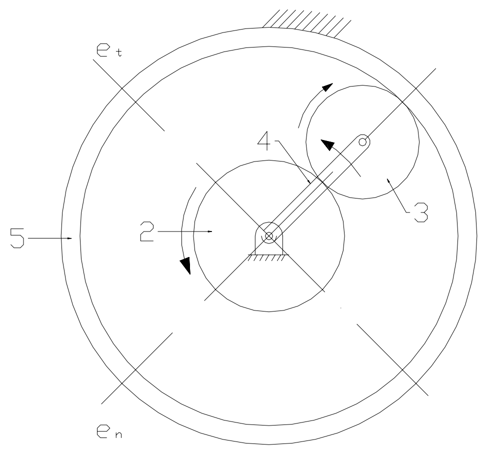
DINÁMICA DE MÁQUINAS
CASOS POSIBLES PARA UN TREN PLANETARIO SIMPLE

A continuación se mostraran todos los casos posibles que pueden ocurrir al estudiar la cinemática de un tren planetario simple, mediante el método de centros instantáneo.

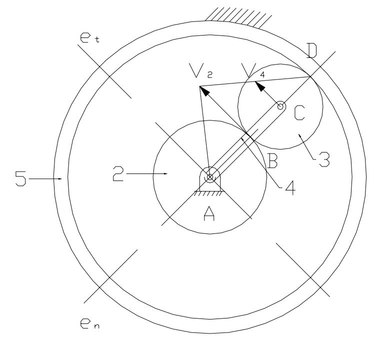
Caso 1. El planeta se traslada y gira.



Eslabón 1: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 2: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 3: Gira en sentido horario.
Eslabón 4: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 5: Velocidad angular nula (fijo a tierra).

Entrada: Sol (Eslabón 2)
Salida: Brazo (Eslabón 4)

Diagrama de Velocidades.



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el punto D es el centro instantáneo de rotación del planeta, los cuales tienen velocidad nula.

V_2, V_4: Velocidades tangenciales en los puntos B y C respectivamente.

ω_2: Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Como el sol gira con una velocidad absoluta ω_2 la velocidad tangencial en el punto B viene dada por:

$$V_2 = \omega_2 . r_2$$

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_2}{2r_3} = \frac{V_4}{r_3}$$

$$V_4 = \frac{1}{2} V_2$$

La velocidad en el punto C, esta dada por:

$$V_4 = \omega_4 . r_4$$

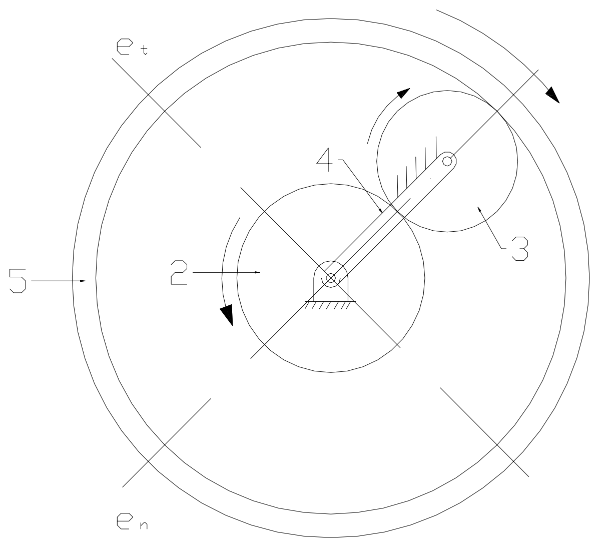
Donde r_4 es la longitud del brazo y dada por $r_4 = r_2 + r_3$

Entonces:

$$\omega_4 = \frac{V_4}{r_4} = \frac{V_2}{2(r_2 + r_3)} = \frac{\omega_2 . r_2}{2(r_2 + r_3)}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del brazo o eslabón 4 en función de parámetros conocidos.

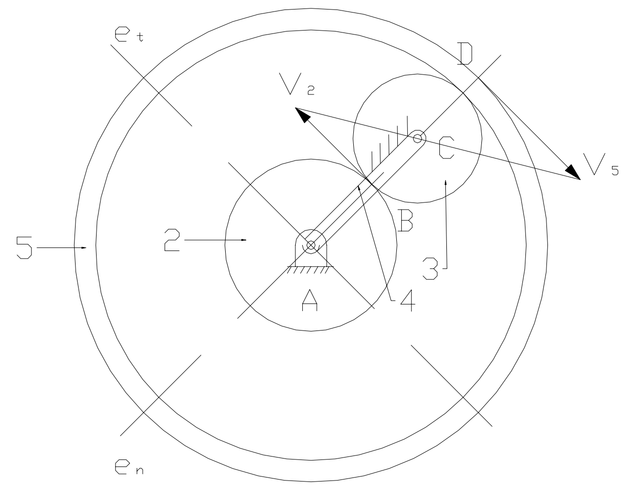
Caso 2. Brazo fijo. Transmisión simple. El planeta no se traslada, solo gira. El anillo gira.



Eslabón 1: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 2: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 3: Gira en sentido horario.
Eslabón 4: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 5: Gira en sentido horario.

Entrada: Sol (Eslabón 2)
Salida: Anular (Eslabón 5)

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el punto C es el centro instantáneo de rotación del planeta y el brazo, los cuales tienen velocidad nula.

V_2, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos B y D respectivamente.

ω_2: Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_2}{r_3} = \frac{V_5}{r_3}$$

$$V_5 = V_2$$

Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_2 . r_2 = \omega_5 . r_5$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_2 . r_2}{r_5}$$

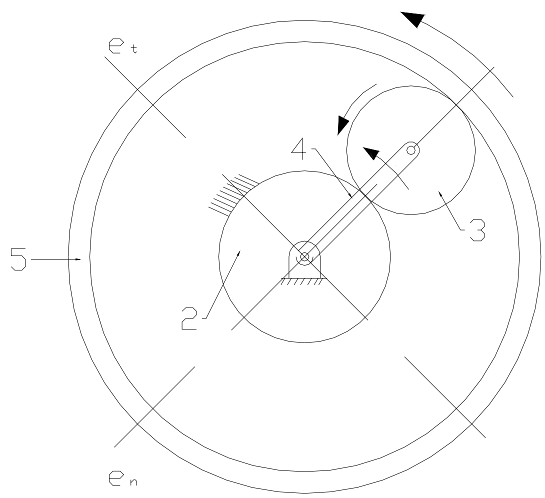
Donde r_5 es la longitud del anular y dada por $r_5 = r_2 + 2r_3$

Entonces:

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 . r_2}{(r_2 + 2r_3)}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del anular o eslabón 5 en función de parámetros conocidos.

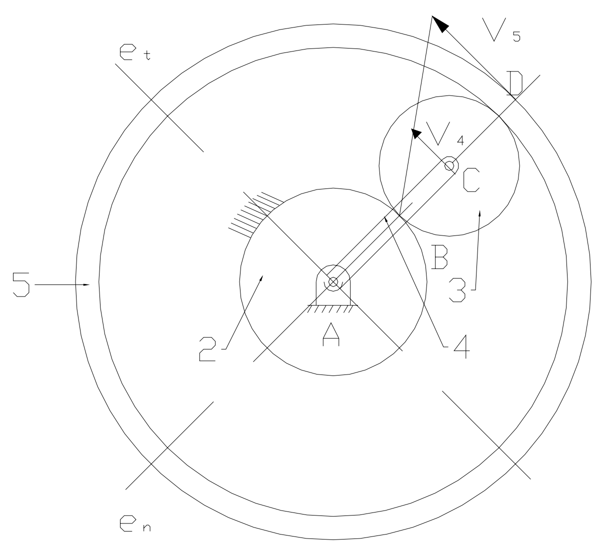
Caso 3. Sol fijo. El planeta se traslada y gira.



Eslabón 1: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 2: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 3: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 4: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 5: Gira en sentido antihorario.

Entrada: anillo anular (Eslabón 5)
Salida: brazo (Eslabón 4)

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el punto B es el centro instantáneo de rotación del planeta y el sol, los cuales tienen velocidad nula.

V_4, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos C y D respectivamente.

ω_5 Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_4}{r_3} = \frac{V_5}{2r_3}$$

$$V_4 = \frac{V_5}{2}$$

Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_4 . r_4 = \frac{\omega_5 . r_5}{2}$$

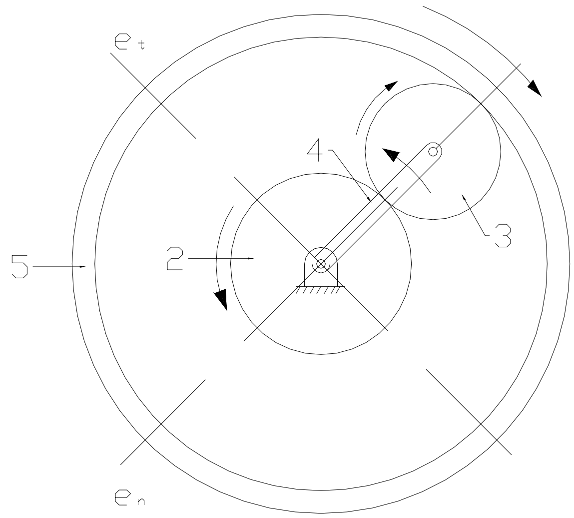
$$\omega_4 .(r_2 + r_3) = \frac{\omega_5 (r_2 + 2r_3)}{2}$$

Entonces:

$$\omega_4 = \frac{\omega_5 .(r_2 + 2r_3)}{2(r_2 + r_3)}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del brazo o eslabón 4 en función de parámetros conocidos.

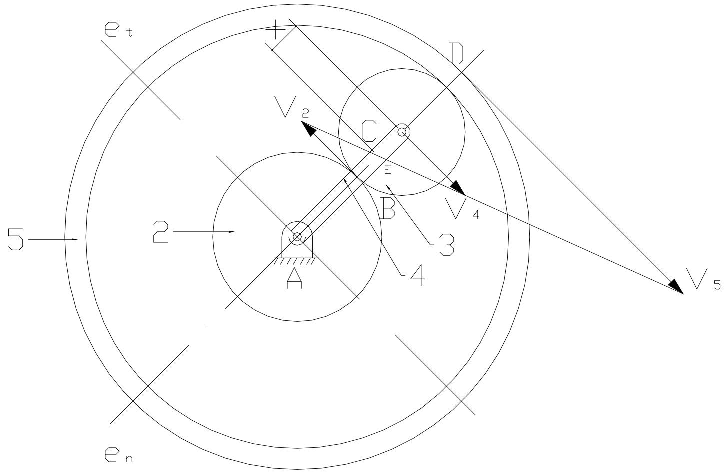
Caso 4.



Eslabón 1: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 2: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 3: Gira en sentido horario.
Eslabón 4: Gira en sentido horario.
Eslabón 5: Gira en sentido horario.

Entrada: sol y brazo (Eslabón 2, 4)
Salida: anular (Eslabón 5)

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el otro centro instantáneo de rotación se da en el punto E (a una distancia x del centro del planeta), los cuales tienen velocidad nula.

V_2, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos B y D respectivamente.

ω_2, ω_4 Conocido.
r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Como el sol gira con una velocidad absoluta ω y el brazo con velocidad absoluta ω_4 las velocidades tangenciales en los puntos B y C vienen dada por:

$$V_2 = \omega_2 . r_2$$

y,

$$V_4 = \omega_4 . r_4 = \omega_4 .(r_2 + r_3)$$

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_4}{x} = \frac{V_2}{r_3 - x} = \frac{V_5}{r_3 + x}$$

De aquí se tiene que:

$$V_4(r_3 - x) = V_2 . x$$
$$V_4 r_3 - V_4 x = V_2 . x$$
$$V_4 r_3 = (V_2 + V_4) x$$
$$x = \frac{V_4 r_3}{V_2 + V_4}$$

Pero también,

$$V_5 = \frac{V_4}{x}(r_3 + x)$$

Sustituyendo en esta el valor de x,

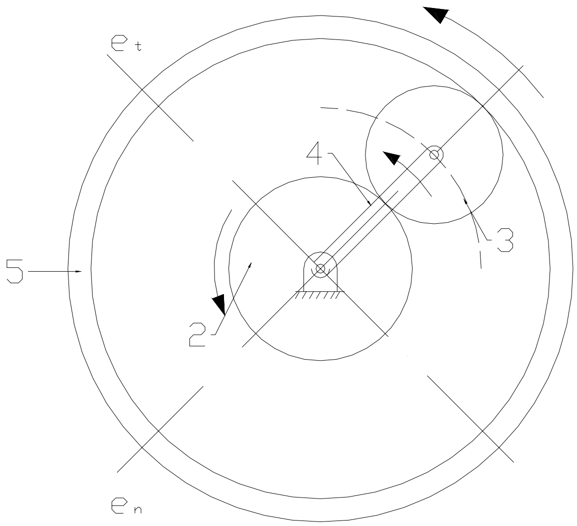
$$V_5 = \frac{(V_2 + V_4) r_3 + V_4 . r_3}{r_3} = (V_2 + V_4) + V_4 = V_2 + 2V_4$$

Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_5 r_5 = \omega_2 r_2 + 2\omega_4 r_4$$
$$\omega_5 = \frac{\omega_2 r_2 + 2\omega_4 r_4}{r_5} = \frac{\omega_2 r_2 + 2\omega_4 (r_2 + r_3)}{r_2 + 2r_3}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del anular o eslabón 5 en función de parámetros conocidos.

Caso 5.

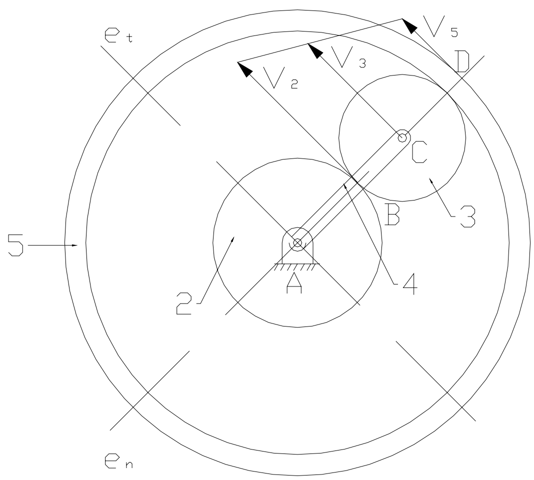


Eslabón 1: Velocidad angular nula (fijo a tierra).
Eslabón 2: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 3: Sentido desconocido.
Eslabón 4: Gira en sentido antihorario.
Eslabón 5: Sentido desconocido.

Entrada: sol y brazo (Eslabón 2, 4)
Salida: anillo (Eslabón 5)

Caso 5a

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el otro centro instantáneo de rotación es desconocido.

V_2, V_3, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos B, C y D respectivamente.

ω_2, ω_3 Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Como V_3 es la velocidad media entre V_2 y V_5, tenemos que:

$$\frac{V_5 + V_2}{2} = V_3$$

$$V_5 = 2V_3 - V_2$$

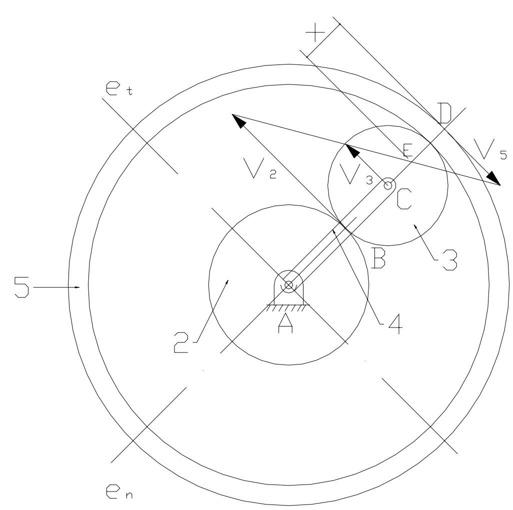
Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_5 r_5 = 2\omega_3 r_3 - \omega_2 r_2$$
$$\omega_5 (r_2 + 2r_3) = 2\omega_3 (r_2 + r_3) - \omega_2 r_2$$
$$\omega_5 = \frac{2\omega_3 (r_2 + r_3) - \omega_2 r_2}{(r_2 + 2r_3)}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del anular o eslabón 5 en función de parámetros conocidos, para el caso 5a.

Caso 5b

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el otro centro instantáneo de rotación es desconocido, en el punto E a una distancia x del punto D.

V_2, V_3, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos B, C y D respectivamente.

ω_2, ω_3 Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_5}{x} = \frac{V_3}{r_3 - x} = \frac{V_2}{2r_3 - x}$$

De aquí se tiene que:

$$V_2(r_3 - x) = V_3(2r_3 - x)$$
$$V_2 r_3 - V_2 x = 2V_3 r_3 - V_3 x$$
$$V_2 r_3 - 2V_3 r_3 = V_2 x - V_3 x$$
$$x = \frac{V_2 r_3 - 2V_3 r_3}{V_2 - V_3}$$

Pero también,

$$V_5 = \frac{V_3}{(r_3 - x)} x$$

Sustituyendo en esta el valor de x, y simplificando,

$$V_5 = \frac{V_2.r_3 - V_3.2r_3}{r_3} = V_2 - 2V_3$$

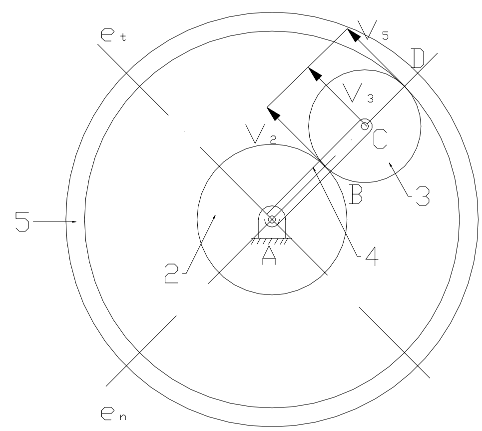
Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_5 r_5 = \omega_2 r_2 - 2\omega_3 r_3$$
$$\omega_5 = \frac{\omega_2 r_2 - 2\omega_3 r_3}{r_5} = \frac{\omega_2 r_2 - 2\omega_3 r_3}{r_2 + 2r_3}$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del anular o eslabón 5 en función de parámetros conocidos, para el caso 5b.

Caso 5c

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el otro centro instantáneo de rotación es desconocido,

V_2, V_3, V_5: Velocidades tangenciales en los puntos B, C y D respectivamente.

ω_2, ω_3 Conocido.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Para este caso es más sencillo,

$$\omega_2.r_2 = \omega_5.r_5 = \omega_5(r_2 + 2r_3)$$

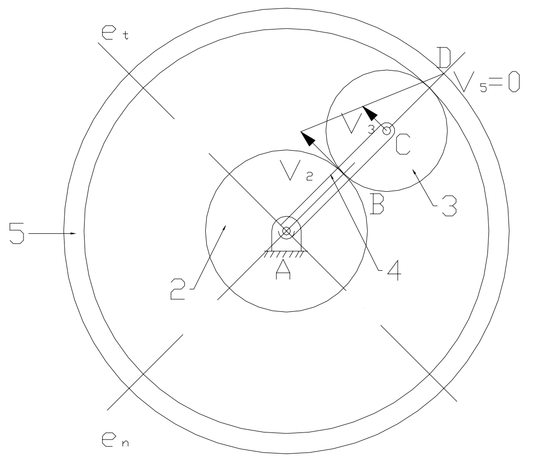
Entonces,

$$\frac{\omega_2.r_2}{(r_2 + 2r_3)} = \omega_5$$

Así obtenemos la velocidad angular de salida del anular o eslabón 5 en función de parámetros conocidos, para el caso 5c.

Caso 5d

Diagrama de Velocidades



Donde:

El punto A es el centro instantáneo de rotación del Sol y del brazo, y el punto D es el centro instantáneo de rotación del planeta y el sol, los cuales tienen velocidad nula.

V_4, V_3: Velocidades tangenciales en los puntos B y C respectivamente.

r_2, r_3: Radios del sol y planeta.

Por triángulos semejantes en el diagrama de velocidades se tiene que:

$$\frac{V_2}{2r_3} = \frac{V_3}{r_3}$$

$$V_3 = \frac{V_2}{2}$$

Por consiguiente las velocidades angulares se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_3.(r_2 + r_3) = \frac{\omega_2.r_2}{2}$$

Así obtenemos la relación entre ω_3 y ω_2 para que ω_5 sea igual a cero, es decir salida del eslabón 5 igual a vero.

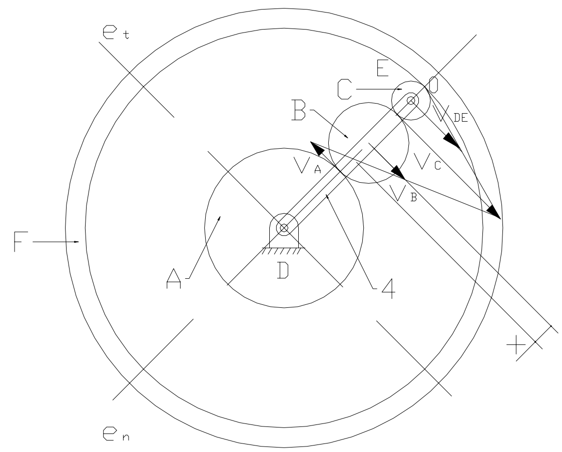
Problema propuesto 16-117. Hibbeler "Dinámica". (Pág. 313)

El sistema de engranes epicíclico es impulsado por la barra rotatoria DE, cuya velocidad angular es ω_{DE} = 5 rad/seg. Si el engrane angular F es fijo, determine las velocidades angulares de los engranes A, B, C.

Datos:

r_A = 50mm
r_B = 40mm
r_C = 30mm
DE = (50+2x40+30)= 160mm
ω_{DE} = 5 rad/seg.
ω_F = 0

Diagrama de Velocidades.



La velocidad V_{DE} viene dada por,

$$V_{DE} = V_O + \overline{\omega}_{DE} x \overline{r}_{O/DE} + V_{O/DE}$$

Donde V_O y $V_{O/DE}$ son nulos, entonces

$$V_{DE} = \overline{\omega}_{DE} x \overline{r}_{O/DE} \Rightarrow V_{DE} = \overline{\omega}_{DE} . \overline{r}_{O/DE} = \omega_{DE} . r_C$$

Debido a esto nos queda que,

$$\omega_C = \frac{\omega_{DE}(r_a + 2r_B + r_c)}{r_C} = \frac{5rad/s(50 + 2.40 + 30)}{30} = 26.66rad$$

Las velocidades tangenciales V_{DE} y V_B están dadas por:

$$V_B = \omega_{DE}(r_A + r_B)$$
$$V_{DE} = \omega_{DE}(r_A + 2r_B + r_C)$$

Según el triángulo de velocidad

$$\frac{V_B}{x} = \frac{V_A}{r_B - x}$$
$$V_A x = V_B.(r_B - x)$$

Y también se tiene que

$$\frac{V_B}{x} = \frac{V_c}{r_B + x}$$
$$V_C x = V_B.(r_B + x)$$

de esto obtenemos el valor de x,

$$x = \frac{V_B r_B}{V_C - V_B}$$

Se desconoce el valor de V_C del otro triangulo de velocidad, se puede decir que,

$$\frac{V_C}{2r_C} = \frac{V_{DE}}{r_C} \Rightarrow 2V_{DE} = V_C$$

Calculemos,

$$V_B = 5rad/s(50+40) = 450$$
$$V_C = 2x5rad/s(r_a + 2r_B + r_C) = 1600$$

Entonces x queda,

$$x = \frac{450x40}{1600-450} = 15.6521$$

Se tenia que,

- rma y tabular.

$$V_C = \omega_B(r_B + x) \Rightarrow \frac{V_C}{(r_B + x)} = \omega_B = \frac{1600}{40+15.6521} = 28.75rad /$$

y también se tenia,

$$V_A = \frac{450(40-15.6521)}{15.6521} = 700$$

Por ultimo,

$$\omega_A = \frac{V_1}{r_A} = \frac{700}{50} = 14rad/s$$

CONCLUSIONES

- Una ventaja del calculo cinemática a través del método de centros instantáneos es su capacidad para facilitar la visualización del movimiento del sistema planetario, además de que produce la dirección de la rotación de salida sin peligro de cometer un error de signo.
- Se trata de un método esencialmente grafico y verdaderamente cinemática.
- Resulta interesante comparar la simplicidad de los cálculos de este método con los métodos de formula y tabular (aprendidos anteriormente en la materia mecanismos). Esto permite lograr mayor economía y exactitud ya que cuantos menos pasos tenga un cálculo, menor será el error por redondeo acumulado. Además la construcción geométrica es un ayuda inapreciable para visualizar la cinemática del tren de engranes y revela claramente las direcciones de rotación reconocidas, con lo que se evita el riesgo de un error de signo que puede ocurrir fácilmente en los métodos de fo